Nafouz

## التمرين الاول:

لتكن $f$ دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{(1+2e)x-e^2}{x+1}$

1- ادرس اتجاه تغير الدالة $f$.

2- ادرس حسب قيم $x$ إشارة $f(x)-x$.

- لتكن $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $N$ كما يلي: $u_0=e+1$ $\quad u_{n+1}=f(u_n)$

3- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_n \succ e$

4- استنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ ثم استنتج أنها متقاربة

- احسب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

5- لتكن $(v_n)$ متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ: $v_n=\frac{1}{u_n-e}$

أ- بيّن أن المتتالية $(v_n)$ حسابية يطلب تعين أساسها $r$ وحدها الاول $v_0$.

ب- اكتب $v_n$ و $u_n$ بدلالة $n$.

6- احسب $S_n$ و $S_n'$: $S_n=v_0u_0+v_1u_1+...+v_nu_n$ $\quad S'=e^{\frac{u_0}{e^{u_0-e}}}\times e^{\frac{u_1}{e^{u_1-e}}}\times....\times e^{\frac{u_n}{e^{u_n-e}}}$

## التمرين الثاني:

لتكن $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=e^{-\frac{x+1}{2}}-e^{-x-1}$ ، نسمي $(C_f)$ المنحني البياني الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و بيّن أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2- عيّن اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3- عيّن معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=-1$

4- أنشئ كلا من المماس $(T)$ والمنحنى $(C_f)$.

5- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة $f(x)=mx+m$

6- $\lambda$ عدد حقيقي حيث $\lambda>0$. أحسب $S(\lambda)$ المساحة للحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ و المستقيمات التي معادلتها $y=0$ و $x=-1$ و $x=\lambda$ ثم عيّن $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} S(\lambda)$

I. نعرّف الدالة $g$ على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=f(x)+e^{-x-1}$

نسمي $g'$ ، $g''$ ، ......... ، $g^{(n)}$ الدوال المشتقة النونية للدالة $g$ حيث $n$ عدد طبيعي غير معدوم

- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $g^{(n)}(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n e^{-\frac{x+1}{2}}$

## التمرين الثالث:

I) الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ ما يلي: $g(x)=2x-1+2x\ln(2x)$

1- ادرس تغيرات الدالة $g$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2- احسب $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$. استنتج إشارة $g(x)$.

II) لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x-1-\ln(2x)}{2x+1}$

$(C)$ تمثيلها البياني الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ $\|\vec{i}\|=2cm$ .

1- احسب النهايات الدالة $f$ واستنتج المستقيمين المقاربين.

2- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(2x+1)^2}$

3- استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

4- عيّن نقطة تقاطع $(C)$ مع محور الفواصل.

5- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى $(C)$ والمستقيم $y=1$.

6- أنشئ المستقيم المقارب و المنحنى $(C)$

- الدالة العددية $h$ المعرفة على $R^*$ بحيث: $h(x)=f(|x|)$

ا- بيّن أن $h$ دالة زوجية.

ب- أنشئ المنحنى $(\Gamma)$ للدالة $h$ انطلاقا من المنحنى $(C)$.

- الدالة العددية $k$ المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $k(x)=\dfrac{-\ln(2x)}{2x+1}$ . $(\gamma)$ تمثيلها البياني.

7- ادرس الوضع النسبي للمنحنيين $(C)$ و $(\gamma)$.

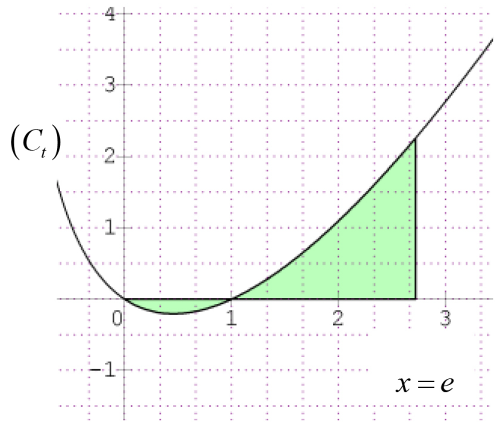
8- احسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين $(C)$ و $(\gamma)$

والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=1$ ، $x=\lambda$ ($\lambda$ عدد حقيقي و $\lambda>1$).

ثم احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} S(\lambda)$

سؤال إضافي:باستعمال التكامل بالتجزئة احسب $\int_0^e t(x)\,dx=\int_0^e (x-1)\ln(x+1)\,dx$

حيث $(C_t)$ منحنى الدالة $t$ أنظر الشكل



## التمرين الأول:

$f$ دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{(1+2e)x-e^2}{x+1}$

1- دراسة اتجاه تغير الدالة $f$

حساب المشتقة:

$$f'(x)=\frac{(1+2e)(x+1)-(1+2e)x+e^2}{(x+1)^2}=\frac{1+2e+e^2}{(x+1)^2}$$

ومنه $f'(x)=\frac{(1+e)^2}{(x+1)^2}$

بما أن $f'(x)\succ 0$ فإن الدالة $f$ متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$

- دراسة إشارة $f(x)-x$

$$f(x)-x=\frac{(1+2e)x-e^2}{x+1}-x=\frac{(1+2e)x-e^2-x^2-x}{x+1}$$

$$=\frac{-x^2-e^2+2ex}{x+1}=-\frac{(x-e)^2}{x+1}$$

ومنه $f(x)-x\prec 0$

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $N$ كما يلي: $\begin{cases}u_0-e+1\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

2- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_n\succ e$

الخاصية $P(n)$... $u_n\succ e$

التحقق من صحة $P(0)$ لدينا $u_0=e+1$ ومنه $u_0\succ e$

ومنه $P(0)$ محققة.

نفرض صحة $P(n)$ و نبرهن صحة $P(n+1)$

لدينا من الفرضية $u_n\succ e$

ولدينا الدالة $f$ المرفقة متزايدة تماما ومنه $f(u_n)\succ f(e)$

ومنه $u_{n+1}\succ e$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع

فإنه من اجل كل عدد طبيعي $u_n\succ e$

3- استنتاج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ ثم استنتاج أنها متقاربة

لدينا $f(x)-x\prec 0$ يكافئ $u_{n+1}-u_n\prec 0$ ومن

المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما.

بما أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فإنها متقاربة

- حساب النهاية: لدينا $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}u_{n+1}=l$

ومنه $l=\frac{(1+2e)l-e^2}{l+1}$ ومنه $l^2+l=(1+2e)l-e^2$

ومنه $l^2+l-(1+2e)l+e^2=0$

ومنه $l^2-2el+e^2=0$ ومنه $(l-e)^2=0$ ومنه $l=e$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}u_n=e$

4- $(v_n)$ متتالية عددية معرفة على $N$ بـ: $v_n=\frac{1}{u_n-e}$

أ- تبيان أن المتتالية $(v_n)$ متتالية حسابية مع تعين أساسها و $v_0$

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-e}=\frac{1}{\frac{(1+2e)u_n-e^2}{u_n+1}-e}$$

$$=\frac{1}{\frac{(1+2e)u_n-e^2-eu_n-e}{u_n+1}}=\frac{1}{\frac{(1+2e)u_n-e^2-eu_n-e}{u_n+1}}$$

$$=\frac{1}{\frac{(1+e)u_n-(1+e)e}{u_n+1}}=\frac{u_n+1}{(1+e)u_n-(1+e)e}.$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+1}{(1+e)u_n-(1+e)e}-\frac{1+e}{(1+e)(u_n-e)}$$

$$=\frac{u_n-e}{(1+e)(u_n-e)}=\frac{1}{1+e}$$

ومنه $(v_n)$ متتالية حسابيةاساسها $r=\frac{1}{1+e}$ وحدها

الاول $v_0=1$

ب- كتابة $v_n$ و $u_n$ بدلالة $n$.

$$v_n=v_0+nr=1+\frac{n}{1+e}$$

لدينا $v_n=\frac{1}{u_n-e}$ ومنه $u_n-e=\frac{1}{v_n}$ ومنه

$$u_n=\frac{1}{v_n}+e$$

ومنه $u_n=\frac{1}{1+\frac{n}{1+e}}+e=\frac{1+e}{1+e+n}+e$

- حساب $S_n$ و $S_n'$: $S_n=v_0u_0+v_1u_1+...+v_nu_n$

- لدينا $v_n=\frac{1}{u_n-e}$ ومنه $v_n(u_n-e)=1$ ومنه $u_nv_n=ev_n$

- ومنه

$$S_n=ev_0+ev_1+...+ev_n=e(v_0+v_1+...+v_n)$$

- ومنه $S_n=e\left[\frac{n+1}{2}\left(2+\frac{n}{1+e}\right)\right]$

- حساب $S'=e^{\frac{u_0}{u_0-e}}\times e^{\frac{u_1}{u_1-e}}\times....\times e^{\frac{u_n}{u_n-e}}$

- لدينا $v_n=\frac{1}{u_n-e}$ ومنه $u_nv_n=\frac{u_n}{u_n-e}$ ومنه

$$S'=e^{u_0v_0}\times e^{u_1v_1}\times...\times e^{u_nv_n}=e^{u_0v_0+u_1v_1+...+u_nv_n}$$

ومنه $S'=e^{S_n}$ ومنه $S'_n=e^{e^{\left[\frac{n+1}{2}\left(2+\frac{n}{1+e}\right)\right]}}$

## التمرين الثاني:

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=e^{-\frac{x+1}{2}}-e^{-x-1}$ ،

سمي $(C_f)$ المنحني البياني الممثل للدالة $f$

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و تبيان أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{x+1}{2}}-e^{-x-1}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{x+1}{2}}-e^{-x-1}=\lim_{x\to-\infty} e^{-x-1}\left(\frac{e^{-\frac{x+1}{2}}}{e^{-x-1}}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} e^{-x-1}\left(e^{-\frac{x+1}{2}+x+1}-1\right)=\lim_{x\to-\infty} e^{-x-1}\left(\underbrace{e^{\frac{x+1}{2}}}_{0}-1\right)=-\infty$$

2- تعين اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها:

-حساب المشتقة:

$$f'(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x+1}{2}}+e^{-x-1}=\frac{1}{2}e^{-x-1}\left(-e^{\frac{x+1}{2}}+2\right)$$

لدينا $\frac{1}{2}e^{-x-1}\succ 0$ ومنه $-e^{\frac{x+1}{2}}+2=0$ ومنه $\ln 2=\frac{x+1}{2}$

ومنه $\ln 4-1=x$

| $x$ | $-\infty$ | | $ln(4)-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |

ومنه الدالة $f$ متزايدة تماما على $]-\infty;\ln 4-1]$ ومتناقصة تماما على $[\ln 4-1;-\infty[$

جدول التغيرات:

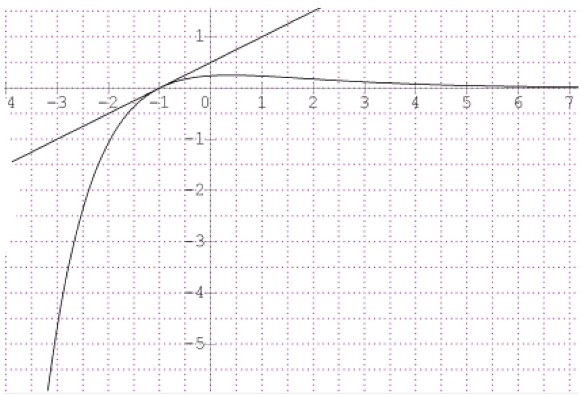
| $x$ | $-\infty$ | | $ln(4)-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | 1/4 | ↘ | 0 |

3- تعيين معادلة $(T)$ المماس للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=-1$

$$y=f'(-1)(x+1)+f(-1)=\frac{1}{2}(x+1)+0$$

ومنه معادلة المماس $(T)$ هي $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

4- إنشاء $(T)$ و $(C_f)$




5- المناقشة بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة $f(x)=mx+m$

المستقيم $y=mx+m$ يشمل نقطة ثابتة هي

$0=mx+m-y$ ومنه $0=m(x+1)-y$

ومنه $y=0$ و $x=-1$

ومنه المستقيمات $y=mx+m$ تشمل $(-1;0)$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع المستقيمات $y=mx+m$

$m\in]-\infty;0]$ للمعادلة حل وحيد.

$m\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$ للمعادلة حلين متمايزين.

من أجل $m=\frac{1}{2}$ للمعادلة حل مضاعف.

من أجل $m\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ للمعادلة حلين متمايزين.

6- $\lambda$ عدد حقيقي حيث $\lambda>0$.

حساب $S(\lambda)$ المساحة للحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ و المستقيمات التي معادلتها $y=0$ و $x=-1$ و $x=\lambda$ ثم تعيين $\lim_{\lambda\to+\infty} S(\lambda)$

$$S(\lambda)=\int_{-1}^{\lambda} f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_{-1}^{\lambda}$$

$$=\left[-2e^{-\frac{x+1}{2}}+e^{-x-1}\right]_{-1}^{\lambda}=-2e^{-\frac{\lambda+1}{2}}+e^{-\lambda-1}+1\ ua$$

ومنه $\lim_{\lambda\to+\infty} S(\lambda)=1$

I. نعرّف الدالة $g$ على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=f(x)+e^{-x-1}$

نسمي $g'$ ، $g''$ ، ......... ، $g^{(n)}$ الدوال المشتقة النونية للدالة $g$ حيث $n$ عدد طبيعي غير معدوم

- البرهان بالتراجع أنه من آجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم :

$$g^{(n)}(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}e^{-\frac{x+1}{2}}$$

الخاصية $g^{(n)}(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}e^{-\frac{x+1}{2}}...P(n)$

التحقق من أجل $P(1)$ أي

$$g^{(1)}(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x+1}{2}}...P(1)$$

لدينا $f'(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x+1}{2}}+e^{-x-1}$

$$g'(x)=f'(x)-e^{-x-1}=f'(x)$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x+1}{2}}+e^{-x-1}-e^{-x-1}=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x+1}{2}}$$

ومنه $P(1)$ محققة

نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي

$$g^{(n+1)}(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}e^{-\frac{x+1}{2}}$$

$$\left(g^{(n)}(x)\right)'=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\times\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x+1}{2}}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}e^{-\frac{x+1}{2}}$$

ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي $n$

$$g^{(n)}(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}e^{-\frac{x+1}{2}}$$

## تمرين الثالث:

$I$) الدالة العددية $g$ المعرفة على $]0;+\infty[$ ما يلي:

$$g(x)=2x-1+2x\ln(2x)$$

1- دراسة تغيرات الدالة g:

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}2x-1+2x\ln(2x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}2x-1+\underbrace{2x\ln(2x)}_{0}=-1$$

حساب المشتقة: $g'(x)=2+2\ln(2x)+2=4+2\ln(2x)$

$4+2\ln(2x)=0$ ومنه $\ln(2x)=-2$ ومنه $x=\frac{e^{-2}}{2}$

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{2e2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

ومنه الدالة $g$ متزايدة تماما على $\left[\frac{1}{2e^2};+\infty\right[$

متناقصة تماما على $\left]-\infty;\frac{1}{2e^2}\right]$

جدول التغيرات:

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{2e2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | $-1$ ↘ | $-1-e^{-2}$ | ↗ $+\infty$ |

2- حساب $g\left(\frac{1}{2}\right)$. استنتج إشارة $g(x)$

ومنه $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$

استنتاج إشارة الدالة $g$

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$II$) الدالة العددية $f$ المعرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{2x-1-\ln(2x)}{2x+1}$$

(C) تمثيلها البياني الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ $\|\vec{i}\|=2cm$ .

1- حساب النهايات الدالة $f$ وستنتاج المستقيمين المقاربين.

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{2x-1-\ln(2x)}{2x+1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1-\ln(2x)}{2x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{2x}\left(1-\frac{1}{2x}-\frac{\ln(2x)}{2x}\right)}{\cancel{2x}\left(1+\frac{1}{2x}\right)}=1$$

للمنحنى مستقيمين مقاربين $x=0$ و $y=1$

2- بيّن أنه: $f'(x)=\frac{g(x)}{x(2x+1)^2}$

$$f'(x)=\frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)(2x+1)-2\left(2x-1-\ln(2x)\right)}{(2x+1)^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{x}+2+2\ln(2x)}{(2x+1)^2}=\frac{-1+2x+2x\ln(2x)}{x(2x+1)^2}$$

$$=\frac{g(x)}{x(2x+1)^2}$$

3- استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$

لدينا $x(2x+1)^2\succ0$ ومنه إشارة الدالة $f$ من اشارة $g(x)$

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

منه الدالة $f$ متزايدة تماما على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ ومتناقصة تماما على $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$

تشكل جدول تغيرات الدالة $f$

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |

4- تعيين نقطة تقاطع (C) مع محور الفواصل:

نحل المعادلة $f(x)=0$ ومنه $2x-1-\ln(2x)=0$

ومنه $2x-1=0$ و $\ln(2x)=0$

ومنه $s=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

5- دراسة الوضع النسبي بين المنحنى (C) والمستقيم $y=1$

$$f(x)-1=\frac{2x-1-\ln(2x)}{2x+1}-1$$

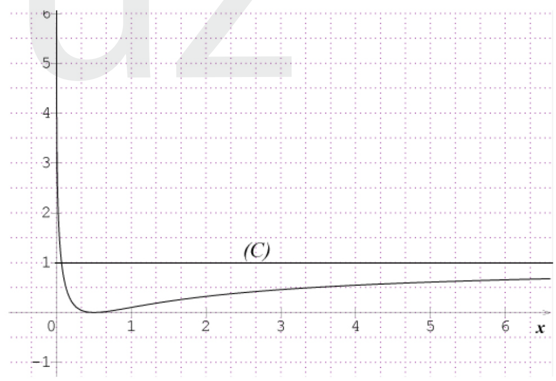
$$=\frac{-2+\ln(2x)}{2x+1}$$

منه $-2-\ln(2x)=0$ ومنه $\ln(2x)=-2$ ومنه $2x=e^{-2}$

منه $x=\frac{e^{-2}}{2}$

| $x$ | $0$ | | $\frac{e^{-2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x+1$ | | $+$ | | $+$ | |
| $-2+\ln(2x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

6- انشاء المستقيم المقارب و المنحنى (C):




- الدالة العددية $h$ بحيث: $h(x)=f(|x|)$

ا- تبيان أن $h$ دالة زوجية:

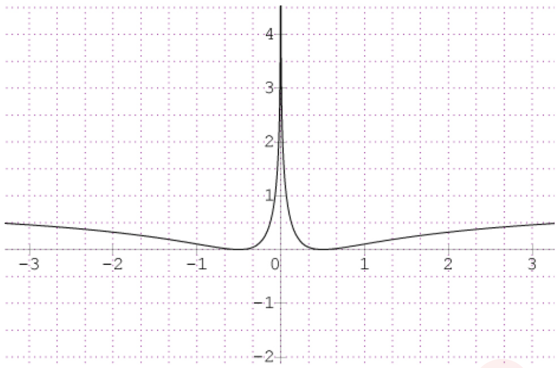
لدينا $D_h=R^*$ ومنه متناظرة بالنسبة للمبدأ.

$$h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$$

ت- انشاء المنحنى $(\Gamma)$ للدالة $h$ انطلاقا من المنحنى $(C)$

من أجل $x\succ 0$ المنحنى $(\Gamma)$ و $(C)$ متطابقان.

وبما أن الدالة $h$ زوجية فإن المنحنى $(\Gamma)$ متناظر بالنسبة لمحور التراتيب



الدالة العددية $k$ المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $k(x)=\frac{-\ln(2x)}{2x+1}$

$(\gamma)$ تمثيلها البياني.

7- دراسة الوضع النسبي للمنحنيين $(C)$ و $(\gamma)$

$$f(x)-k(x)=\frac{2x-1-\ln(2x)}{2x+1}-\frac{-\ln(2x)}{2x+1}$$

$$f(x)-k(x)=\frac{2x-1}{2x+1}$$

ومن أجل $x\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$ المنحنى $(C)$ تحت المنحنى $(\gamma)$.

من أجل $x=\frac{1}{2}$ المنحنى $(C)$ يقطع المنحنى $(\gamma)$ عند $\left(\frac{1}{2};0\right)$.

ومن أجل $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ المنحنى $(C)$ فوق المنحنى $(\gamma)$.

8- حساب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين $(C)$ و $(\gamma)$ والمستقيمين اللذين معادلتاها: $x=1$ ، $x=\lambda$

$$S(\lambda)=\int_1^{\lambda} f(x)-k(x)\,dx=\int_1^{\lambda}\frac{2x-1}{2x+1}dx$$

$$=\int_1^{\lambda}\frac{2x+1-2}{2x+1}dx=\int_1^{\lambda}1-\frac{2}{2x+1}dx$$

$$=\left[x-\ln(2x+1)\right]_1^{\lambda}=\lambda-\ln(2\lambda+1)-1+\ln(3)$$

$$S(\lambda)=\left[\lambda-\ln(2\lambda+1)-1+\ln(3)\right]\times 4cm^2$$

حساب

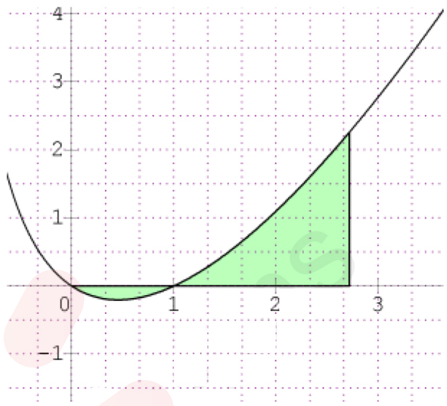
$$\lim_{\lambda\to+\infty}S(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}4\left[\lambda-\ln(2\lambda+1)-1+\ln(3)\right]$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}4(2\lambda+1)\left[\underbrace{\frac{\lambda}{2\lambda+1}}_{\frac{1}{2}}-\underbrace{\frac{\ln(2\lambda+1)}{2\lambda+1}}_{0}+\underbrace{\frac{\ln(3)}{2\lambda+1}}_{0}\right]$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}S(\lambda)=+\infty$$

لسؤال إضافي:باستعمال التكامل بالتجزئة حساب

$$\int_0^e t(x)\,dx=\int_0^e (x-1)\ln(x+1)\,dx$$




$$\begin{cases} u(x)=\ln(x+1) \\ v(x)=x-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x)=\dfrac{1}{x+1} \\ v(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x \end{cases}$$

$$\int_0^e t(x)\,dx=\underbrace{-\int_0^1 t(x)\,dx}_{s_1}+\underbrace{\int_1^e t(x)\,dx}_{s_2}$$

ومنه

$$s_1=-\int_0^1 t(x)\,dx=-\left[\ln(x+1)\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\right]_0^1$$

$$+\int_0^1 \frac{1}{x+1}\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)dx$$

$$=-\left[\ln(x+1)\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\right]_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2-2x}{x+1}dx$$

$$=-\left[\ln(x+1)\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\right]_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 x-3+\frac{3}{x+1}dx$$

$$=-\left[\ln(x+1)\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\right]_0^1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2-3x+3\ln(x+1)\right]_0^1$$

$$=\frac{\ln 2}{2}-\frac{5}{4}+\frac{3\ln 2}{2}$$

$$s_1=\frac{8\ln(2)-5}{4}$$

$$s_2=\left[\ln(x+1)\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\right]_1^e$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2-3x+3\ln(x+1)\right]_1^e$$

$$=\ln(e+1)\left(\frac{1}{2}e^2-e\right)+\frac{\ln 2}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^2-3e+3\ln(e+1)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{-5}{2}+3\ln 2\right)$$

$$s_2=\ln(e+1)\left(\frac{1}{2}e^2-e\right)+$$

$$\frac{8\ln 2-e^2+6e-6\ln(e+1)-5}{4}$$

ومنه

$$\int_0^e t(x)\,dx=s_1+s_2=0{,}136+1{,}679=1{,}815\ ua$$